Ответы и решения задач «зелёного» уровня сложности MathCat

Задача 1. (5 баллов) Даша и Маша играли в «крестики-нолики» на доске 3×3. Кто играет крестиками, а кто ноликами, сначала определили жребием, а потом менялись. Маша выиграла 4 партии, а Даша – 3. На рисунке приведены окончания партий в том порядке, как они игрались. Определите, сколько партий выиграла Маша крестиками: (См. рис. 1)

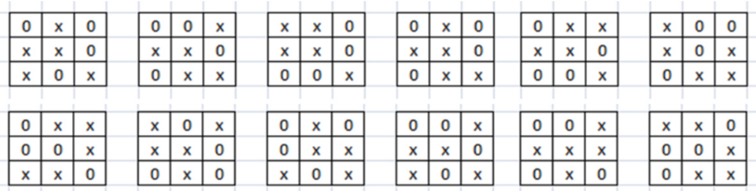


Рисунок 1

Ответ: 2

Решение1. Пусть в первой партии одна девочка играла крестиками, а вторая ноликами. Тогда во второй - первая играла ноликами, а вторая крестиками. Запишем, кто как играл:

I X 0 **X** 0 X **0** X 0 X 0 **X 0**
II 0 X 0 **X** 0 X **0** X 0 **X** 0 X

Жирным шрифтом выделено, кто выиграл в этой партии. Откуда видно, что одна выиграла 4 партии (значит, это Маша), а другая - 3 партии (значит, это Даша). Откуда легко видеть, что, Маша выиграла крестиками две партии.

Решение2. Заметим, что всего выиграно крестиками 4 партии и они стоят парами. Но поскольку символ каждую партию меняется, это значит, что в каждой такой паре крестиками выиграла одна девочка, а потом вторая. Кем они ни были, каждая выиграла по две партии крестиками.

Задача 2. (7 баллов) Ваня и Даня сыграли в шахматы 17 партий. Кто играет белыми, первый раз определяли жребием, а далее они менялись цветом. Оказалось, что каждый выиграл одинаковое число партий. Причем каждый выигрывал только белыми и не было двух результативных партий подряд. Какое минимальное количество ничьих было?

Ответ. 9 ничьих

Решение. Поскольку результативные партии не могут идти подряд, для их максимального количества они должны идти через одну. То есть больше 9 результативных партий быть не могло. А поскольку каждый выиграл одинаковое количество, то всего результативных не более 8.
Пример на 8 легко строится:

В - В - В - В - - Д - Д - Д - Д -

Задача 3. (10 баллов) На клетчатой доске две клетки выкрашены в серый цвет так, как на рисунке. Сколько существует прямоугольников со сторонами по линиям сетки, содержащих обе эти клетки? На рисунке приведен пример такого прямоугольника. (См. рис. 2)

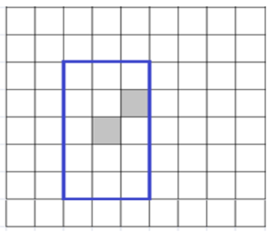


Рисунок 2

Ответ: 320 прямоугольников

Решение: Заметим, что прямоугольник определяется выбором вертикальных и горизонтальных линий, его ограничивающих. Для нижней линии 4 варианта, для верхней - 4. Для левой 4 вариантов и для правой - 5. Каждая из этих линий может быть выбрана независимо, поэтому количество прямоугольников равно произведению 4×4×4×5=320.

Задача 4. (8 баллов) Метатель ножей метает в мишень ножи и вилки с тремя зубцами. Всего он бросил 19 предметов, оставивших на мишени 35 дырок. Сколько у метателя ножей и сколько вилок, если никакие два предмета не попали в одно и то же место?

Ответ: 8 вилок и 11 ножей

Решение: Если бы все предметы были ножами, то на мишени осталось 19 дырок. Их же на 35 - 19 = 16 дырок больше. “Лишние” дырки добавляют вилки - по две на каждую. Значит, вилок было 16:2 = 8, а ножей 19 - 8 = 11.

Задача 5. (13 баллов) В верном арифметическом равенстве в левой части одинаковые цифры заменили одинаковыми буквами, а разные - разными. Получилось: МАТ х Н+С+АТ = 2022. Восстановите исходное равенство. Укажите все возможные варианты.

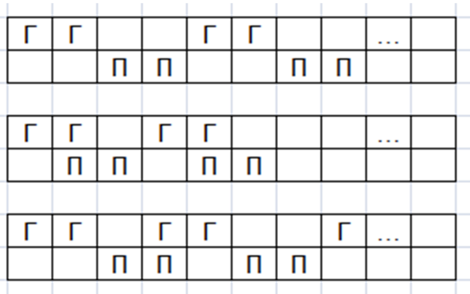
Ответ: 387x5 + 0 + 87 или 974x2 + 0 + 74.

Решение: Перепишем равенство немного по-другому:
2022 = МАТ x Н+С+АТ = Мx100xН + АТx(Н+1) + С
А не меньше 1, следовательно С+АТ не меньше 12 и не больше 105
Отсюда МxН не меньше 12 и не больше 20.
Перебирая разложение на два однозначных множителя чисел от 12, до 20, находим решения.

Задача 6. (12 баллов) На кошачьей выставке в ряд сидит 111 котов. Каждый кот либо пушистый, либо голубоглазый, либо и пушистый, и голубоглазый. Известно, что если пушистый кот сидит рядом с пушистым котом, то он лжет. Если голубоглазый сидит рядом с голубоглазым, то он лжет. Во всех других случаях кот говорит правду. Каждый пушистый заявил “Рядом со мной два пушистых кота”. Каждый голубоглазый заявил “Рядом со мной два голубоглазых кота. (Если кот был и пушистым, и голубоглазым, то он сказал два утверждения). Какое максимальное количество утверждений могло быть сказано или, что то же самое - какое наибольшее количество пушистых голубоглазых котов могло сидеть на выставке?

Ответ: 37

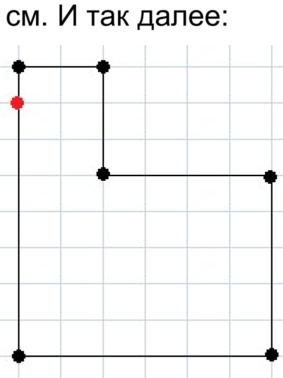
Решение: Заметим, что пушистые коты должны сидеть парами. В противном случае они будут высказывать истинное утверждение, хотя должны лгать, или лгать, хотя должны говорить правду. Аналогично для голубоглазых котов. В свете этого коты распределены по тройкам (один голубоглазый и не пушистый, один пушистый и не голубоглазый и один и пушистый, и голубоглазый) и четверкам (два пушистых не голубоглазых и два голубоглазых и не пушистых) с двойками (либо пара пушистых, либо пара голубоглазых) - между тройками.



Пушистого голубоглазого (или дополнительного утверждение) нам дает только тройка. Причём между любыми двумя одновременно пушистыми и голубоглазыми должно сидеть как минимум два кота, которые таковыми не являются. Соответственно, чем больше троек, тем больше утверждений. 111 делится на 3 (=37), поэтому максимальное количество таких котов = 37

P.S. Заметим, что не любое количество от 0 до 37 можно реализовать. Например, 1 возможно, а 2 нет. Собственно любое четное число нереализуемо

Задача 7. (10 баллов) Улитка ровно в 10 утра отправилась в путешествие. В первый час она проползла 10 см по прямой, затем повернула на 90º в какую-то сторону и за второй час проползла еще 20 см по прямой, затем снова повернула на 90º и в следующий час проползла 30 см. И так далее: каждый час поворачивала на 90º и проползала на 10 см больше, чем в предыдущий час. На каком наименьшем расстоянии от начальной точки она могла оказаться в 17 часов?



Ответ: 0 см

Решение: Это задача на конструктив. Поскольку можно предъявить пример путешествия, когда улитка возвращается в исходную точку, то никакого доказательства минимальности не требуется. 0 – это минимально возможное расстояние. На рисунке сторона клетки равна 10см и семь отрезков, поскольку с 10 до 17 прошло 7 часов.

Задача 8. (11 баллов) В ряд стоят 5 коробочек, в каждой из которых есть хотя бы одна конфета. Будем говорить, что конфеты соседние, если они лежат в одной и той же или в соседних коробочках. Известно, что у каждой конфеты либо ровно 4, либо ровно 7 соседних конфет. Сколько всего конфет может быть в коробочках? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 13 конфет.

Решение: Всего коробочек 5, обозначим их буквами А, Б, В, Г, Д в том порядке, как они расположены в ряду.
Исходя из определения соседних конфет следует, что суммарное количество конфет, лежащих в А и Б равно 5 или 8. Аналогично в сумме в А, Б и В тоже 5 или 8.
Заметим, что поскольку по условию в каждой коробочке лежит хотя бы одна конфета, то эти две суммы не могут быть равны.
Следовательно А+Б=5, А+Б+В=8.
Из тех же соображений
Г+Д=5, В+Г+Д=8.
Сложив все эти четыре равенства, получаем 2(А+Б+В+Г+Д)=26. Откуда общее количество конфет, лежащих в коробочках, равно 13.

Задача 9. (15 баллов) Из костяшек домино сложили рамку, как на рисунке по правилам домино, а именно: рядом расположены клетки с одинаковым количеством точек. Какое максимальное общее количество точек может быть в сумме на всех использованных доминошках, если дубли и шестерки не использовали? (См. рис. 3)

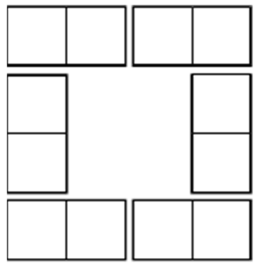
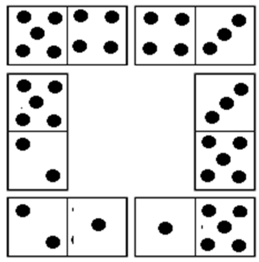


Рисунок 3

Ответ: 40

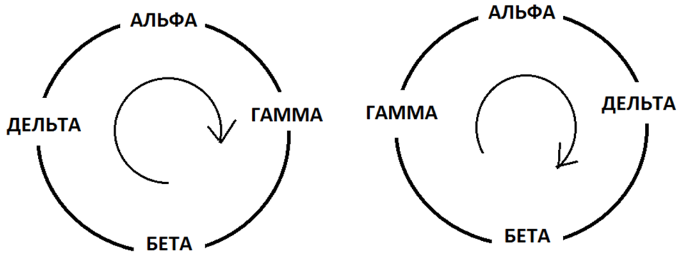
Решение: Заметим, что, поскольку доминошки выкладывались по правилам домино, то каждое число точек участвовало четное число раз. Выпишем доминошки (не дубли) с максимальной суммой точек: 4-5, 5-3, 5-2, 3-4, 5-1, 4-2. Сумма всех точек на них равна 9+8+7+7+6+6 = 43 - нечетное число, а при выкладывании по правилам домино должна быть четная сумма. Кроме того, поскольку среди этих доминошек только одна единица и три четверки, то обойтись только ими для создания рамки мы не сможем. Увеличивать сумму мы не можем, поэтому заменив две доминошки, мы уменьшим сумму как минимум на 2, но она должна быть четна. Значит максимальная сумма не превосходит 40. Для 40 можно построить пример.



Задача 10. (9 баллов) Трамвай ходит по круговому маршруту, на котором только 4 остановки — Альфа, Бета, Гамма, Дельта. Однажды путешественник ехал в трамвае с местными жителями и спросил, когда будет станция Альфа. Ему с готовностью ответили: Баба Маня: «Та остановка, на которой ты зашёл, — первая после Альфы». Баба Валя: «Да нет, ты всё путаешь! Альфа была после Дельты. А зашёл он на Бете». Баба Аня: «Вы обе неправы! Гамма и Дельта — соседние остановки!» Баба Галя: «Как раз на Альфе-то он и вошёл!». Как потом выяснилось, все утверждения бабушек про остановки и путешественника оказались неверными. Определите, в каком порядке идут остановки на маршруте и на какой остановке вошёл путешественник?

Ответ: Остановки по круговому маршруту: Альфа - Дельта - Бета - Гамма, путешественник вошел на Гамме.

Решение: Поскольку все утверждения бабушек про путешественника и остановки неверны, то он зашел в трамвай не на Бете и не на Альфе.
Поскольку Гамма и Дельта не соседние, то они “разбавлены” Бетой и Альфой. Значит, с точностью до отражения остановки расположены так:



Поскольку утверждение, что Альфа после Дельты неверно, то вариант слева отпадает. Но тогда путешественник зашел не на Дельте. Значит, он зашел на Гамме